Partie 1 – QCM : justifier votre réponse le cas échéant.

1 On considère un filtre de transmittance $H(z) = \dfrac{1-z^{-2}}{2}$:

- ❑ **a)** Ce filtre est instable.
- ❑ **b)** Il s'agit d'un filtre non récursif.
- ❑ **c)** Son équation de récurrence est $y_n = 0{,}5(x_n - y_{n-2})$.

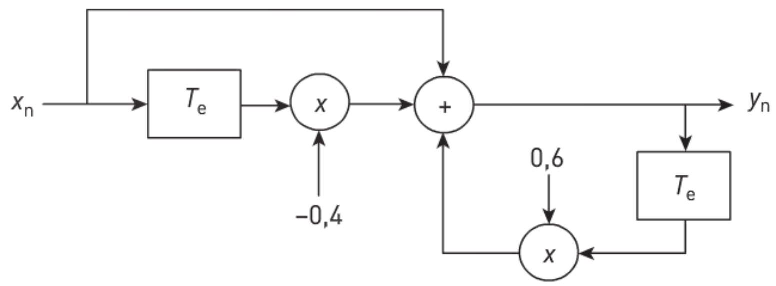
2 Un filtre numérique est caractérisé par l'équation de récurrence suivante : $y_n = 0{,}5(x_n - y_{n-1})$.

- ❑ **a)** La réponse impulsionnelle du filtre est $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \ldots\right\}$.
- ❑ **b)** La transmittance du filtre est $H(z) = \dfrac{0{,}5z}{z-0{,}5}$.
- ❑ **c)** Ce filtre est stable.

3 Un filtre numérique est caractérisé par l'équation de récurrence suivante : $y_n = 0{,}2x_n + 0{,}8y_{n-1}$.

- ❑ **a)** La transmittance du filtre est $H(z) = \dfrac{0{,}2}{z+0{,}8}$.
- ❑ **b)** $z_1 = 0{,}8$ est un pôle de $H(z)$.
- ❑ **c)** La réponse indicielle unitaire du filtre est {0,2 ; 0,36 ; 0,49 ; 0,59 ; ...}.

4 Un filtre numérique est caractérisé par le schéma bloc structurel suivant :



- ❑ **a)** La transmittance du filtre est $H(z) = \dfrac{z+0{,}4}{z-0{,}6}$.
- ❑ **b)** Le filtre est instable.
- ❑ **c)** Il s'agit d'un filtre RII.

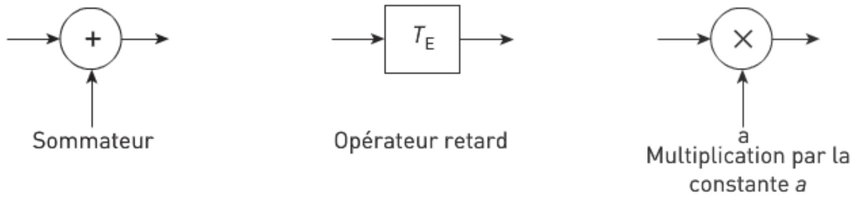
Partie 2 – Exercice 1

Un moteur asynchrone alimenté par un onduleur est asservi numériquement en vitesse. Le cadencement du calcul se fait à une fréquence $f_E = 20$ kHz et le système étudié est identifiable à un système du second ordre numérique, modélisable par l'équation de récurrence suivante :

$$s_n = 1{,}921 s_{n-1} - 0{,}9238 s_{n-2} + 0{,}0028 e_n$$

où e_n et s_n correspondent respectivement aux valeurs, à l'instant nT_E, de la consigne et de la fréquence de rotation du moteur toutes deux exprimées en tr/min.

1. Représenter la structure associée à l'équation de récurrence en utilisant les blocs fonctionnels suivants :



2. L'algorithme associé au système est-il de type récursif ou de type non récursif ?

3. Le système étant au repos (e_n et s_n nulles pour $n < 0$), on souhaite étudier la réponse du système à un échelon de consigne, e_n passant à $n = 0$ de 0 à 150 tr/min. Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	$n < 0$	0	1	2	3	4	5
$t(\mu s)$	$t < 0$						
e_n	0	150	150	150	150	150	150
s_n	0						

4. Quelle est alors la valeur en régime permanent de s_n, notée s_P, sachant que pour t tendant vers l'infini, $s_n = s_{n-1} = s_{n-2}$?

5.1 Montrer que la fonction de transfert en z du système étudié peut se mettre sous la forme :

$$T(z) = \frac{0{,}0028z^2}{z^2 - 1{,}921z + 0{,}9238}.$$

5.2 En appliquant le théorème de la valeur finale, retrouver la valeur de s_P précédemment déterminée.

- **Théorème de la valeur initiale**
  $x_0 = \lim_{z \to \infty} X(z)$.
- **Théorème de la valeur finale**
  $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{z \to 1} (z-1)X(z)$ si cette limite existe.

Partie 2 – Exercice 2

Contraintes mécaniques et filtrage numérique (d'après sujet d'examen)

Des tests de qualité de matériaux sont réalisés en imposant des contraintes mécaniques sur différents échantillons. Les mesures effectuées sont gérées par un système de traitement numérique comportant entre autre un filtre caractérisé par l'algorithme suivant : $y_n = 0,5y_{n-1} + 0,5x_n$.

1. Pourquoi ce filtre est-il récursif ?

2. On applique à l'entrée du filtre une séquence impulsion $\{x_n\} = \{\delta_n\}$ telle que $\delta_n = 1$ pour $n = 0$ et $\delta_n = 0$ pour $n \neq 0$.

2.1 Déterminer les valeurs des cinq premiers échantillons y_0, y_1, y_2, y_3, et y_4 en sortie du filtre.

2.2 Conclure sur la stabilité du filtre en justifiant votre réponse.

3. On applique à l'entrée du filtre une séquence échelon unité $\{x_n\} = \{u_n\}$ telle que $u_n = 1$ pour $n \geq 0$ et $u_n = 0$ pour $n < 0$.

3.1 Déterminer les valeurs des sept premiers échantillons en sortie du filtre.

3.2 Représenter la réponse indicielle du filtre et en déduire sa nature.

4. Montrer que la transmittance en z du filtre peut s'écrire : $H(z) = \dfrac{0,5z}{z - 0,5}$.

Partie 2 – Exercice 3

Caractérisation d'un filtre non récursif

On étudie un filtre numérique caractérisé par l'équation de récurrence suivante : $y_n = 0,5(x_n - x_{n-1})$.

1. Représenter le schéma bloc traduisant l'algorithme du filtre.

2. Donner l'expression de $H(z)$, sa fonction de transfert en z.

3. Déterminer sa fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$ et montrer qu'elle peut s'écrire : $\underline{H}(j\omega) = \sin\left(\frac{\omega T_E}{2}\right) e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T_e}{2}\right)}$. On pourra utiliser la relation $e^{+j\frac{\omega T_e}{2}} - e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} = 2j\sin\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)$.

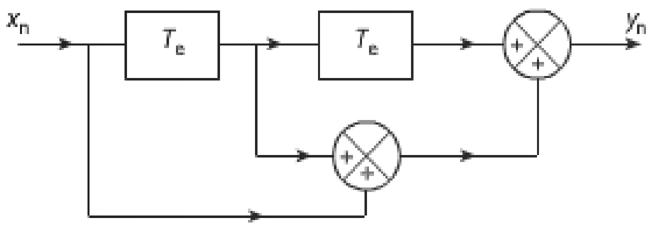
4. On note $x = \frac{\omega}{\omega_E}$, la pulsation réduite. Pour $0 \leq x < 0,5$, tracer les courbes du module $H(x)$ et de la phase $\varphi(x)$ de la fonction de transfert.

5. Préciser la nature du filtre et sa bande passante sachant que la fréquence d'échantillonnage adoptée est $f_E = 10$ kHz.

Partie 2 – Exercice 4

Récepteur TNT (d'après sujet d'examen)

Lors de la réception d'un signal TNT, suite à des phénomènes de réflexions d'ondes, la même information est reçue plusieurs fois à des instants différents au niveau de l'antenne réceptrice. Afin de tenir compte du retard engendré par les réflexions, un filtrage numérique est implanté dans les récepteurs (décodeurs) TNT. Le schéma simplifié retenu pour le filtre est donné ci-dessous.



Le bloc T_e représente un retard d'une période d'échantillonnage T_e.

On note x_n la valeur de l'échantillon pris à l'instant $t = nT_e$, x_{n-1}, la valeur de l'échantillon pris à l'instant $t = (n-1)T_e$, etc.

On note $X(z)$ la transformée en z de la séquence de nombres $\{x_n\}$.

1. Filtre numérique

1.1 Écrire l'équation de récurrence reliant y_n à x_n et aux échantillons précédents de l'entrée.

1.2 Donner la nature du filtre numérique implanté et préciser ce que cela entraîne du point de vue de sa stabilité.

2. Réponse impulsionnelle

2.1 Déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre numérique en complétant le tableau suivant :

n	–1	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	1	0	0	0	0	0	0
x_{n-1}								
x_{n-2}								
y_n								

2.2 Représenter la séquence $\{y_n\}$ correspondant à la réponse impulsionnelle.